

Roll No.

E-3669

B. Sc. (Part II) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Second

(Differential Equations)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) घात श्रेणी विधि से हल कीजिए :

$$y'' - xy' + y = 0$$

Solve by power series method :

$$y'' - xy' + y = 0$$

P. T. O.

(ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

Prove that :

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

(स) निम्नलिखित स्टर्म-ल्यूविले समस्या के सभी आइगेन मान और आइगेन फलन ज्ञात कीजिए :

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) + y'(0) = 0$$

$$y(1) + y'(1) = 0.$$

Find all eigen values and eigen functions of the following Sturm-Liouville problem :

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) + y'(0) = 0$$

$$y(1) + y'(1) = 0.$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निम्नलिखित का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :

(i) $e^{2t}(3\sin 4t - 4\cos 4t)$

(ii) $\frac{1 - e^{-t}}{t}$

Find Laplace transformation of the following :

(i) $e^{2t} (3\sin 4t - 4\cos 4t)$

(ii) $\frac{1 - e^{-t}}{t}$

(ब) संवलन प्रमेय का उपयोग कर ज्ञात कीजिए :

$$L^{-1} \left\{ \frac{P}{(P^2 + a^2)^2} \right\}$$

Find by using convolution theorem :

$$L^{-1} \left\{ \frac{P}{(P^2 + a^2)^2} \right\}$$

(स) लाप्लास रूपान्तरण के उपयोग से हल कीजिए :

$$(D^2 + 9)y = \cos 2t$$

$$y(0) = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Solve by using Laplace transformation :

$$(D^2 + 9)y = \cos 2t$$

$$y(0) = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) हल कीजिए :

$$(y + z)p + (z + x)q = x + y$$

Solve :

$$(y + z)p + (z + x)q = x + y$$

(ब) चारपिट विधि से हल कीजिए :

$$q = 3p^2$$

Solve by Charpit's method :

$$q = 3p^2$$

(स) पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

$$x^2 p^2 + y^2 q^2 = z^2$$

Find complete integral :

$$x^2 p^2 + y^2 q^2 = z^2$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) हल कीजिए :

$$p + r + s = 1$$

Solve :

$$p + r + s = 1$$

(ब) हल कीजिए :

$$(D^3 - 4D^2D' + 4DD'^2)z = 4\sin(2x + y)$$

Solve :

$$(D^3 - 4D^2D' + 4DD'^2)z = 4\sin(2x + y)$$

(स) हल कीजिए :

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 6y \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 y^4$$

Solve :

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 6y \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 y^4$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) फलनक :

$$I[y] = \int_0^4 [xy' - y'^2] dx,$$

$$y(0) = 0$$

$$y(4) = 3$$

का चरम मान के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the extremal value of the following functional :

$$I[y] = \int_0^4 [xy' - y'^2] dx,$$

$$y(0) = 0$$

$$y(4) = 3.$$

(ब) निम्नलिखित फलनक का चरम हल ज्ञात कीजिए :

$$I[y] = \int_0^{\pi/4} [y''^2 - y^2 + x^2] dx$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Find extremal solution of the following functional :

$$I[y] = \int_0^{\pi/4} [y''^2 - y^2 + x^2] dx$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(स) दीर्घवृत्त :

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

एवं बिन्दु (1, 0) के मध्य लघुतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find shortest distance between ellipse :

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

and point (1, 0).